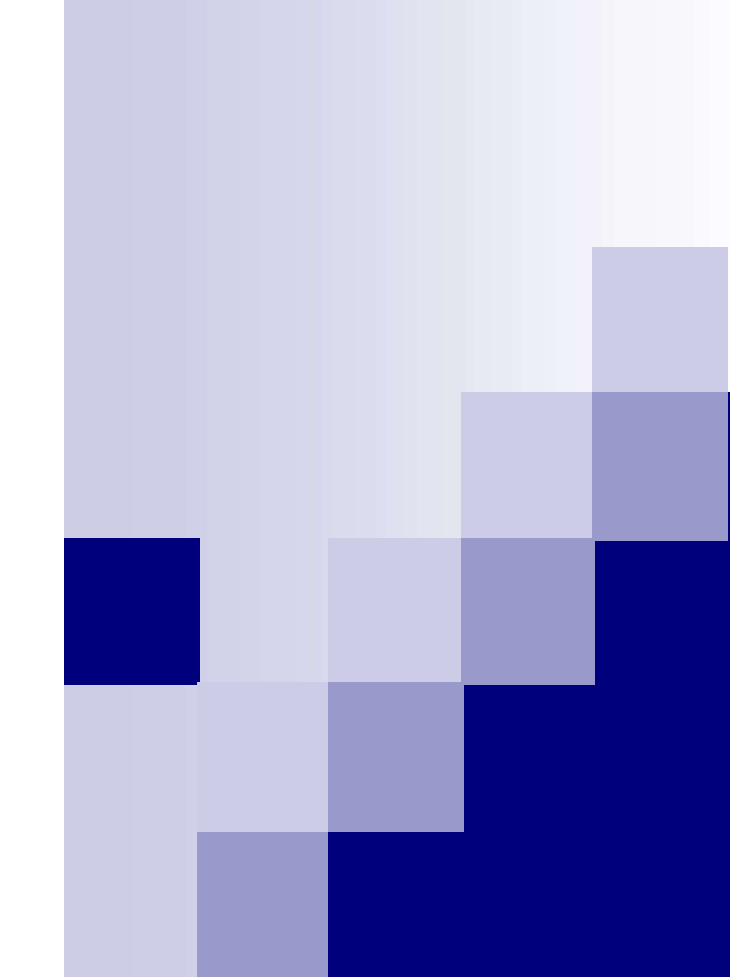


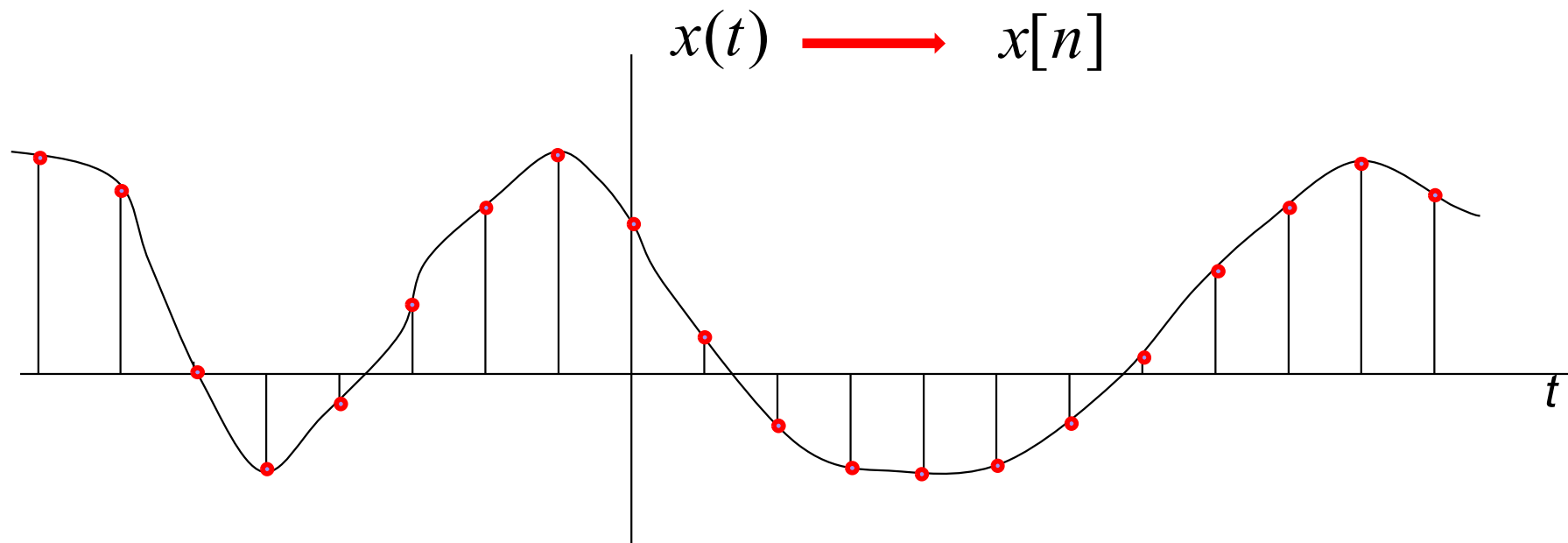


**Сигналдарды
дискреттеу.
Санақ теоремасы.**

Шектелген жолақты сигналдар

$$x \in L_2(-\infty, +\infty) \longrightarrow \begin{cases} X(f) \rightarrow 0 & f \rightarrow \pm\infty \\ x(t) \rightarrow 0 & t \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

Егер спектрлік тығыздық шекті болса $(-F_B, F_B)$



Санақ теоремасы

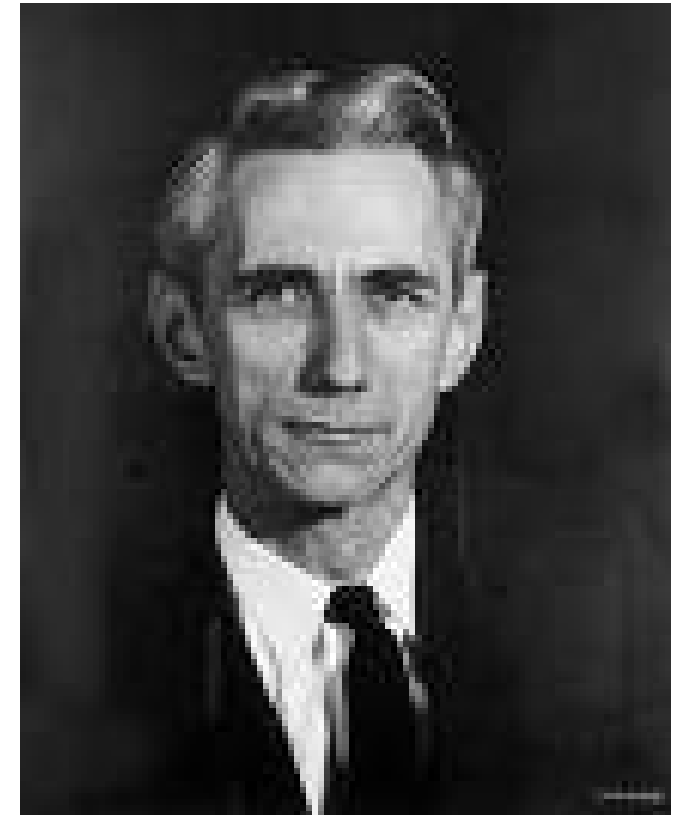
В.А. Котельников - 1933



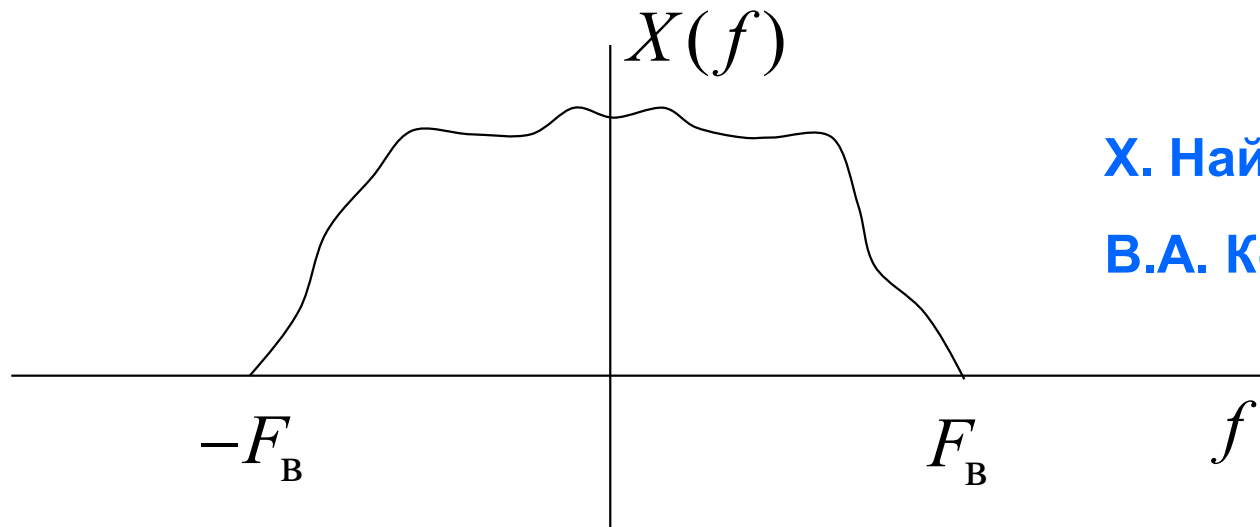
Х. Найквист - 1928



К. Шеннон - 1948



Санақ теоремасы



Х. Найквист - 1928

В.А. Котельников - 1933

К. Шеннон - 1948

Біз Фурье комплексті түрлендіруін қайта қарастырамыз

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf},$$

$$C_k = \frac{1}{2F_B} \int_{-F_B}^{F_B} X(f) e^{-j \frac{2\pi}{2F_B} kf} df, \quad k = \overline{-\infty, \infty}$$

Котельников санақ теоремасы

Сигналды мына түрде жазамыз

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{2F_{\epsilon}}kf} e^{j2\pi ft} df = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} e^{j2\pi f \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right)} df = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} e^{j2\pi f \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right)} df = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} \cos \left[2\pi f \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right) \right] df = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2F_{\epsilon} \frac{\sin \left[2\pi F_{\epsilon} \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right) \right]}{2\pi F_{\epsilon} \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right)}
\end{aligned}$$

Фурье қатарының коэффициенттері

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2F_\epsilon} \int_{-F_\epsilon}^{F_\epsilon} X(f) e^{-j \frac{2\pi}{2F_\epsilon} k f} df = \\ &= \frac{1}{2F_\epsilon} \int_{-F_\epsilon}^{F_\epsilon} X(f) e^{j 2\pi f t} df \Bigg|_{t=-k \frac{1}{2F_\epsilon}} = \\ &= \frac{x\left(-k \frac{1}{2F_\epsilon}\right)}{2F_\epsilon} \end{aligned}$$

$$T_d = \frac{1}{2F_{\text{в}}} \quad \text{деп белгілесек}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-kT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t + kT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t + kT_d)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d)}$$

Котельников санақ теоремасы

Сонымен

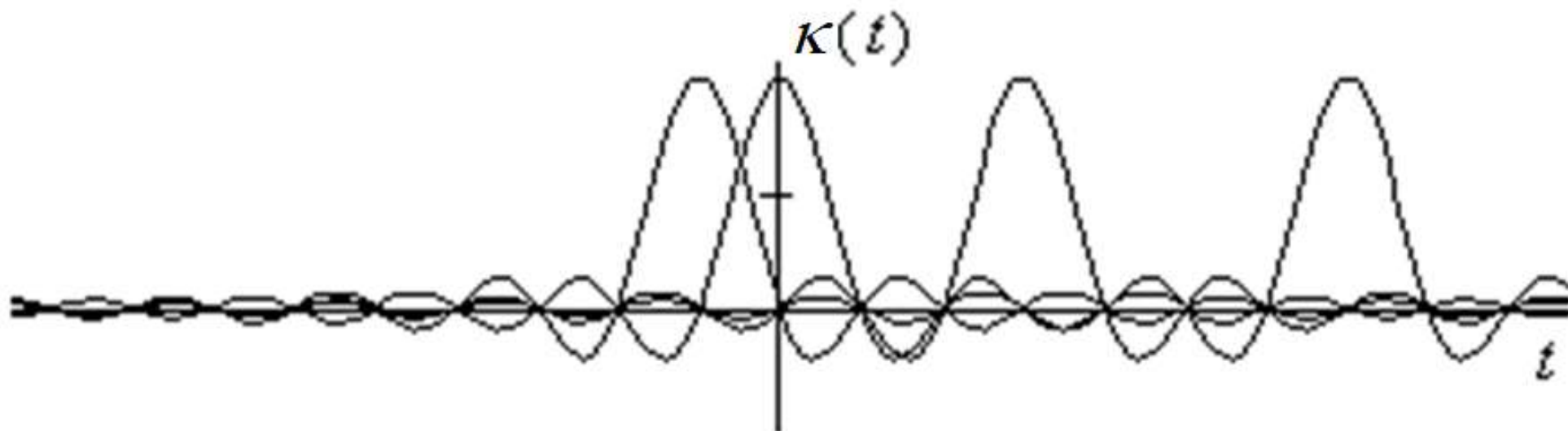
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d)} \quad T_d = \frac{1}{2F_e}$$

Базистік функциялар $\left\{ \kappa_n(t), n = \overline{-\infty, \infty} \right\}$

$$\kappa_0(t) = \sin \left(\frac{\pi}{T_d} t \right) / \left(\frac{\pi}{T_d} t \right)$$

$$\kappa_n(t) = \kappa_0(t - nT_d)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)}$$



Котельников базисі немесе қатары

Салыстырайық

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi}{2F_B} k f}$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2F_B \frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right)}$$

Жалпыланған Рэлей формуласы бойынша

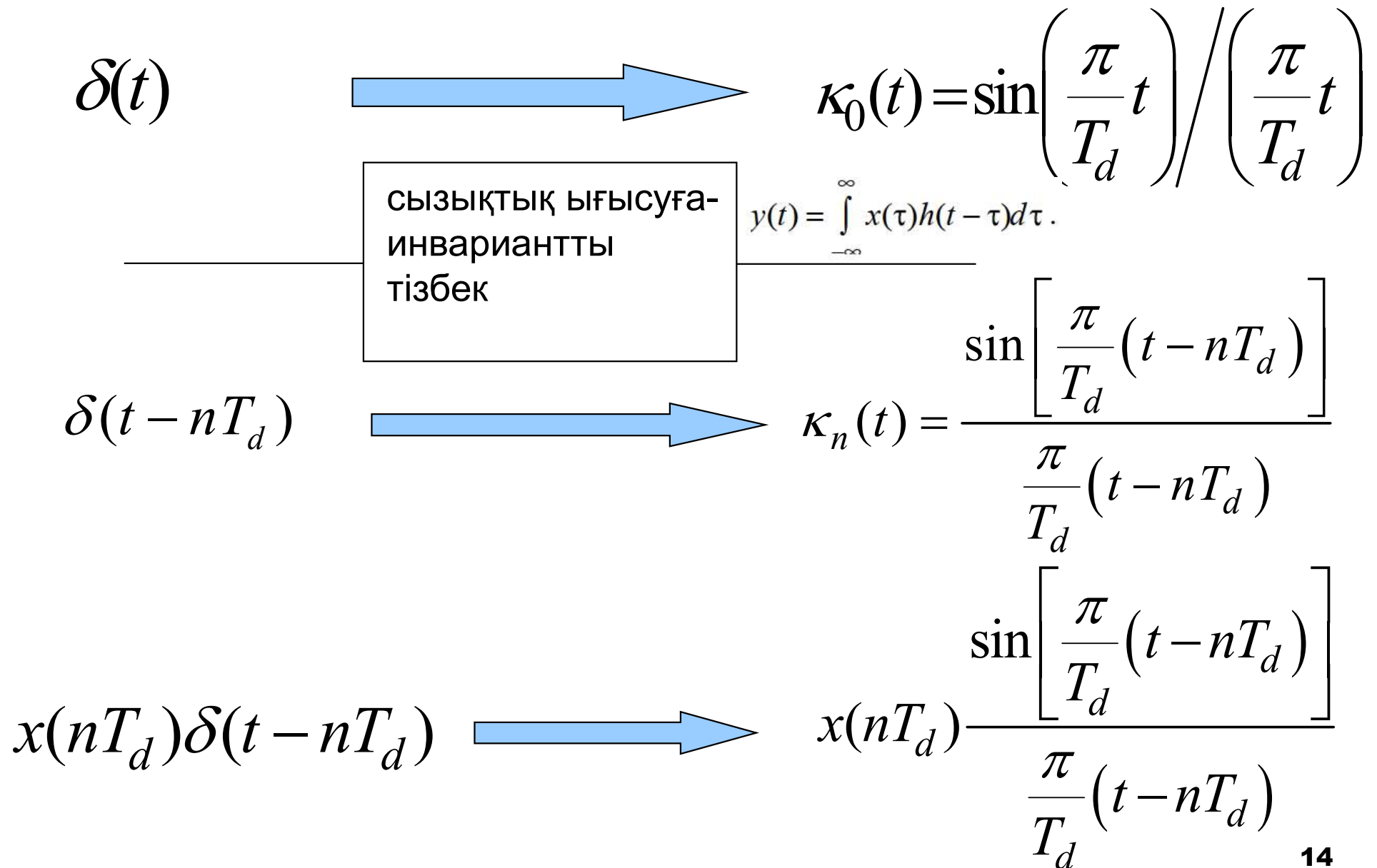
$$\left(\frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right)}, \frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + m \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + m \frac{1}{2F_B} \right)} \right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} k f}, \frac{1}{2F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} m f} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2F_B} e^{j\frac{2\pi}{2F_B}kf}, \frac{1}{2F_B} e^{j\frac{2\pi}{2F_B}mf} \right) =$$

$$= \frac{1}{4F_B^2} \int_{-F_B}^{F_B} e^{j\frac{2\pi}{2F_B}(k-m)f} df = \frac{1}{2F_B} \delta_{km}$$

$$(K_k, K_m) = \frac{1}{4F_B^2} \int_{-F_B}^{F_B} e^{j\frac{2\pi}{2F_B}(k-m)f} df = \frac{1}{2F_B} \delta_{km}$$

Көрсеткіштерден аналогтық сигналды қалпына келтіру



n-бойынша қосынды алсақ

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \delta(t - nT_d)$$

СЫЗЫҚТЫҚ ЫҒЫСУҒА-
ИНВARIANTТЫ
ТІЗБЕК

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d)}$$

Котельников қатары

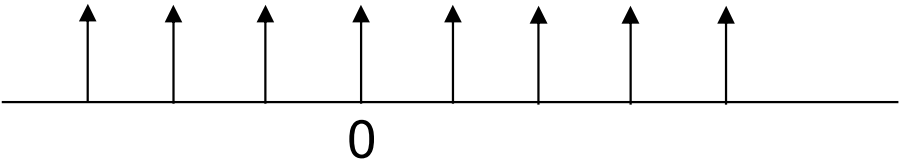
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \psi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(\pi f_d(t - k\Delta t))}{\pi f_d(t - k\Delta t)}$$

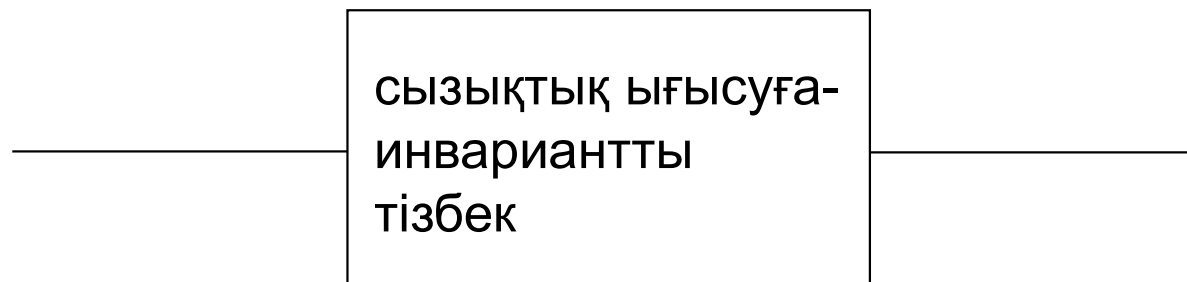
Спектрлік мағынада

Әсері (АИМ-сигнал)

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \delta(t - nT_d) = \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = x(t) \tilde{\delta}(t) \end{aligned}$$

где $\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d)$





Көбейту теоремасы бойынша

$$v(t) = x(t)\tilde{\delta}(t) \longrightarrow V(f) = X(f) * \tilde{\Delta}(f)$$

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\frac{2\pi}{T_d}nt}$$

Фурье қатарының
коэффициенттері

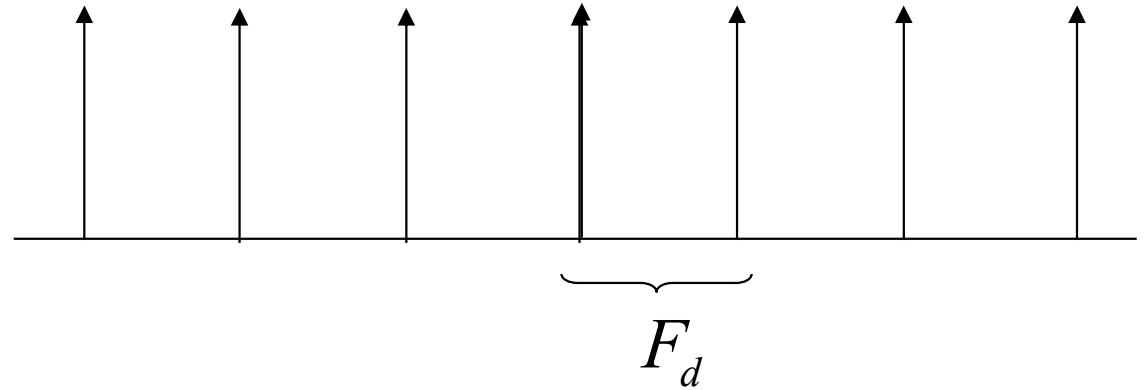
$$S_n = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_d}nt} dt = \frac{1}{T_d}$$

Сондықтан спектрлік тығыздық

$$\tilde{\Delta}(f) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_d}\right)$$

Спектрлік тығыздық

$\tilde{\Delta}(f)$



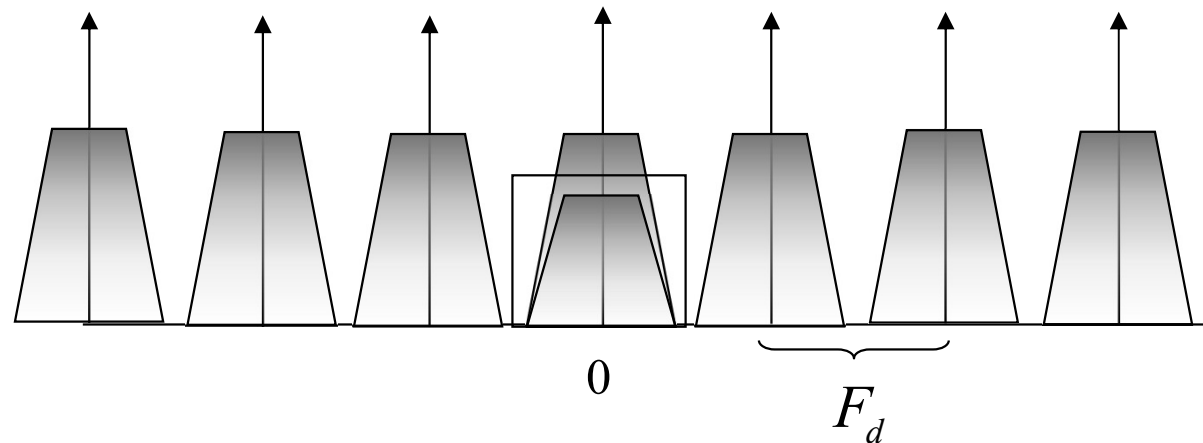
$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \tilde{\Delta}(f - \phi) d\phi$$

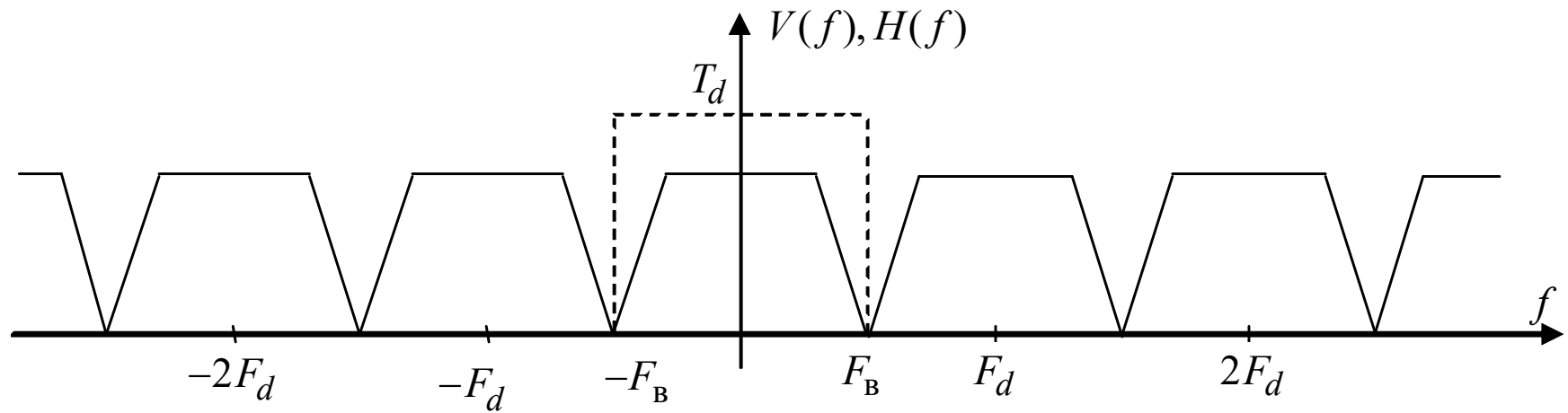
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \phi - \frac{n}{T_d}\right) d\phi =$$

$$= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \delta \left(f - \phi - \frac{n}{T_d} \right) d\phi$$

$$= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X \left(f - \frac{n}{T_d} \right) =$$

$$= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF_d)$$





интерполяциялық сүзгі

$$K(f) = \begin{cases} T_d, & -F_B < f < F_B, \\ 0 & \text{Басқа жағдайларда} \end{cases}$$

$$h(t) = \sin \left[\frac{\pi}{T_d} t \right] / \left(\frac{\pi}{T_d} t \right)$$

Дискретизация мен интерполяцияның айырмашылығы

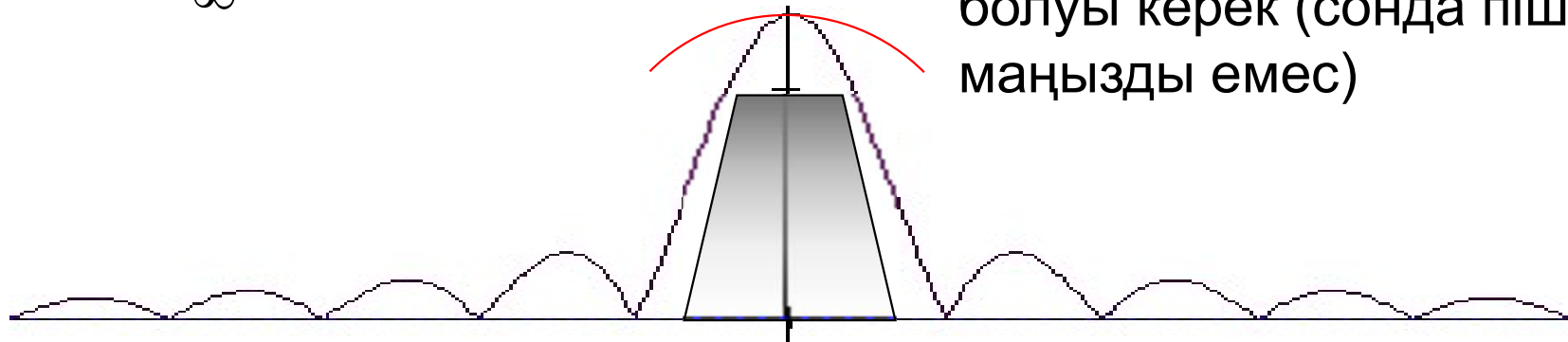
$v(t) = x(t)\tilde{\delta}(t)$ интерполяция процесін сипаттайды
(оның үлгілерінен аналогтық сигналды
қалпына келтіру)

Аналогтық сигналдың (жалғыз) үлгісін алу
конволюциялық түрдегі өрнекпен сипатталады

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t_0 - t)dt$$

$$x(t_0) \approx \int_{-\infty}^{\infty} x(t)d(t_0 - t)dt$$

импульс сигналдың АКФ
шамасынан айтарлықтай қысқа
болуы керек (сонда пішін
маңызды емес)





Сонымен аналогты-сандық түрлендірудің негізгі жұмысы уақытты дискретизациялау болып табылады - бұл үздіксіз функцияны оның лездік мәндерінің немесе көрсеткіштерінің тізбегі арқылы көрсету. Дискреттеуді жүзеге асыратын құрылғы **Дискреттеуші құрылғысы** деп аталады.

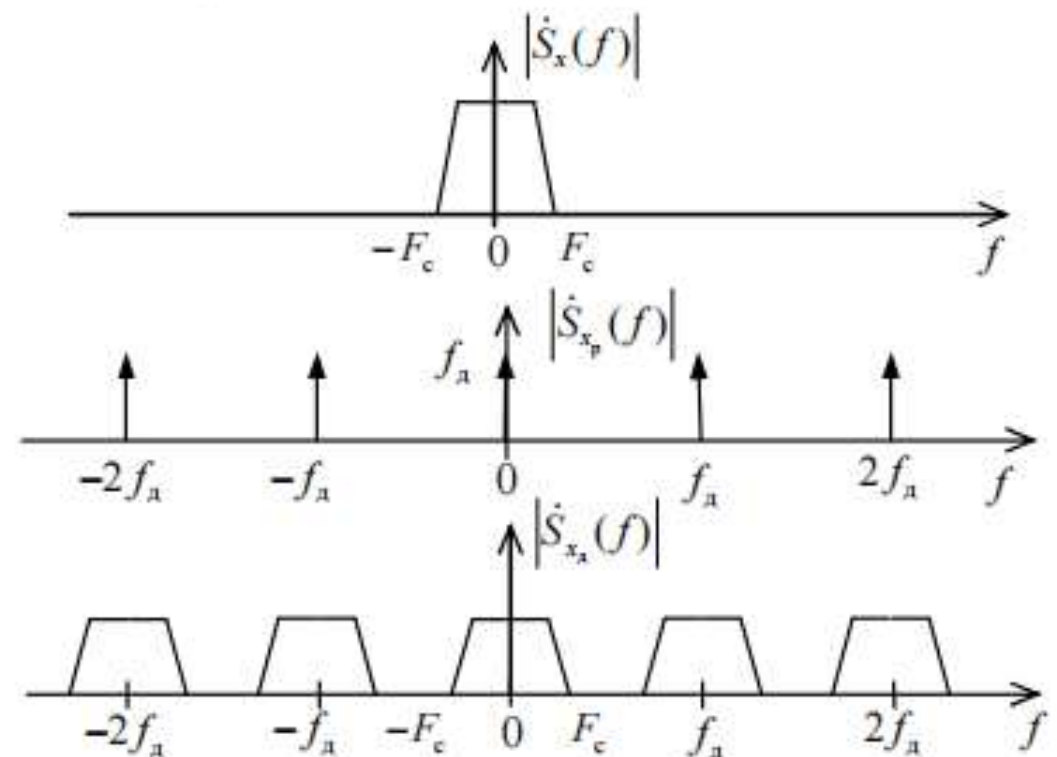
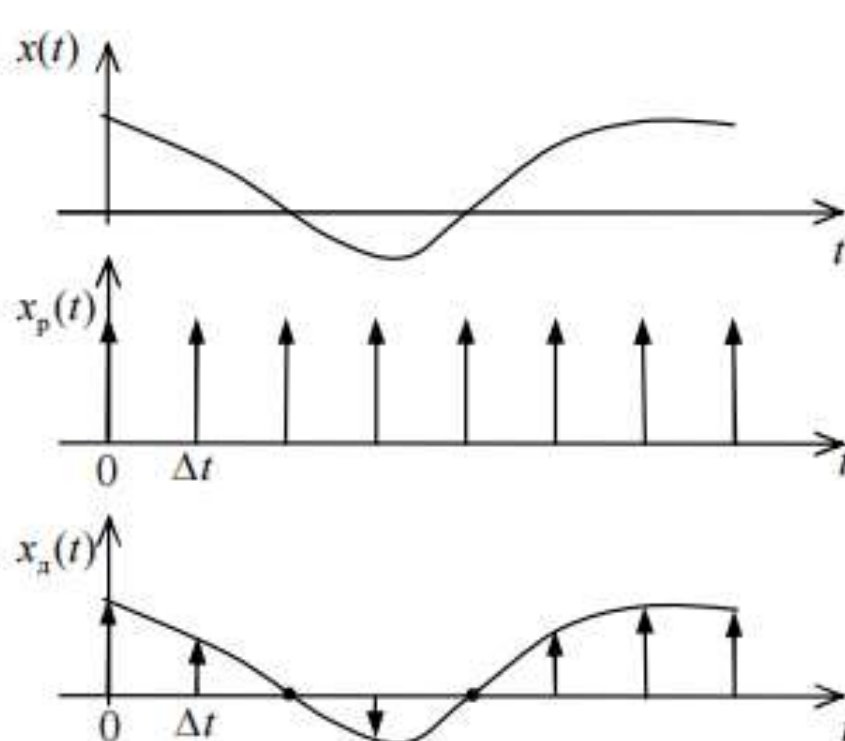
Котельников теоремасы. Спектрі $f \rightarrow (-F_s; F_s)$ жиілік диапазонында шоғырланған және осы жолақтан тыс оның спектрі нөлге тең кез келген сигнал $\Delta t \leq 1/(2F_s)$ уақыт интервалынан кейін алынған көрсеткіштерінен толығымен қалпына келтірілуі мүмкін.

Δt уақыт аралығы **дискреттеу интервалы** деп аталады, ал $F_d = 1/\Delta t$ мәнi **іріктеу немесе дискреттеу жиілігі** болып табылады.

$$x_d(t) = x(t)x_p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta t).$$

$$\dot{S}_{x_p}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \delta(f - kf_d) = f_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_d)$$

$$\dot{S}_{x_d}(f) = f_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f - kf_d).$$



Жоғарыда айтылғандардан шығатыны, үздіксіз $x(t)$ сигналын қалпына келтіру үшін $x_d(t)$ сигналын жіберу коэффициенті $K=\Delta t$ болатын $f \rightarrow (-F_s; F_s)$ жолағында және кесу жиілігі $f \rightarrow (-F_s; F_d - F_s)$ □ төмен жиілікті сүзгіден (аналогты) өткізу жеткілікті. Сүзгі шығысында толық қалпына келтірілген $x(t)$ сигналын аламыз. Бұл сүзгі **қалпына келтіру сүзгісі** деп аталады.

Бұл сүзгінің шығысындағы қалпына келтірілген сигнал $x(t)$ сүзгінің $g(\tau)$ импульстік сипаттамасының және кіріс сигналының көбейтіндісінің интегралы нәтижесінде табуға болады:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) x_d(t - \tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta(t - \tau - k\Delta t) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k g(t - k\Delta t).$$

$$g(\tau) = \Delta t \frac{\sin(2\pi f_{cp} \tau)}{\pi \tau},$$

$$x(t) = x_d(t) * g(t) = (2f_{cp}\Delta t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(2\pi f_{cp}(t - k\Delta t))}{2\pi f_{cp}(t - k\Delta t)}$$

Параметрлері:

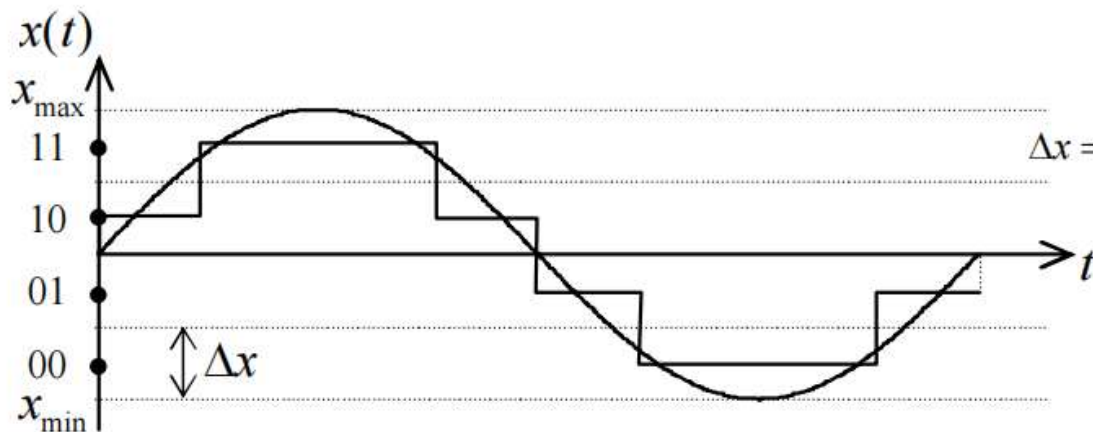
Абсолютті және салыстырмалы сигналды қалпына келтіру қатесін мына формулалар арқылы табуға болады:

$$\Delta E_x = \|x(t) - x'(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - x'(t))^2 dt = 2 \int_{F_x}^{\infty} |S_x(f)|^2 df ,$$

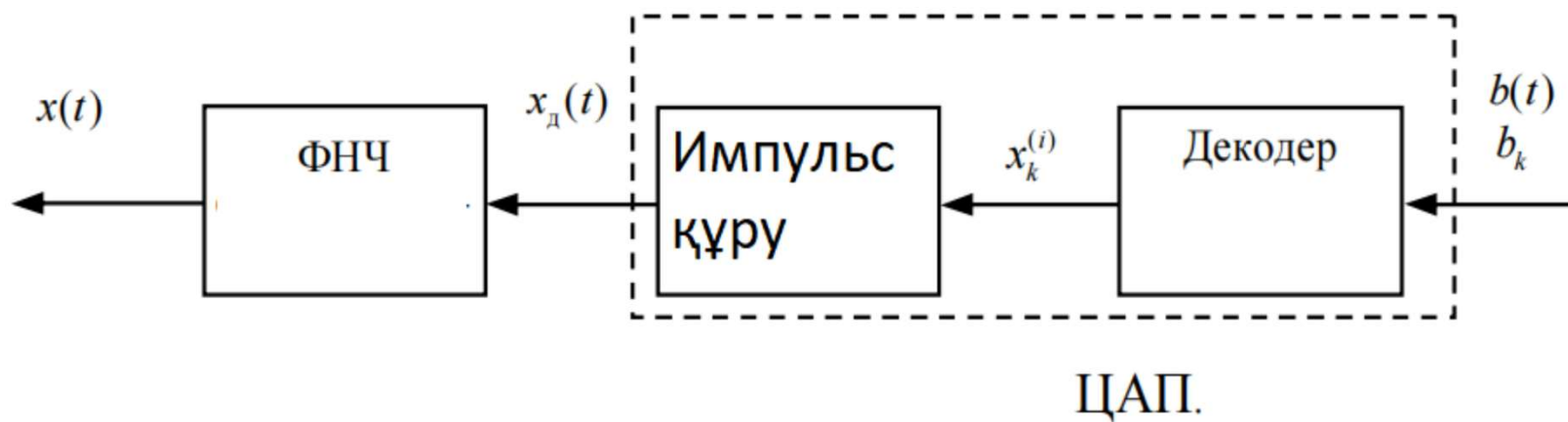
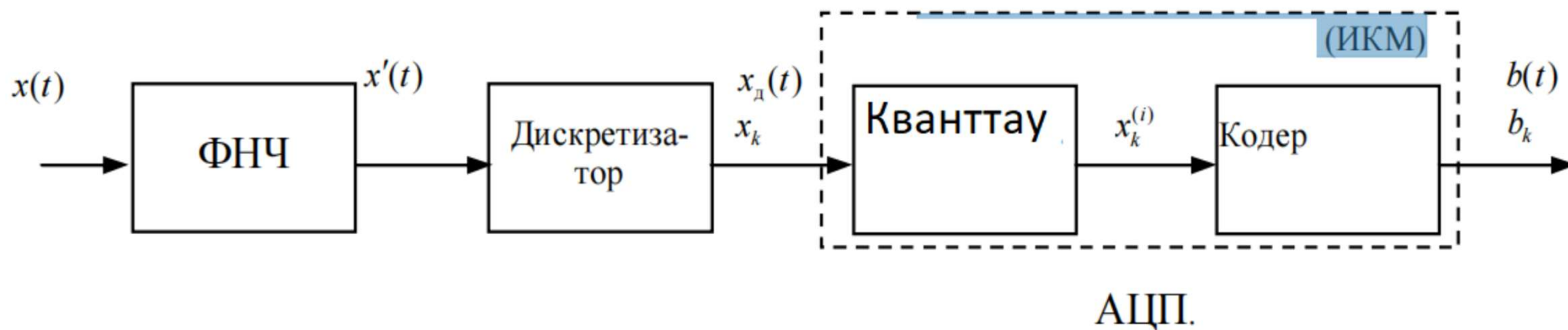
$$\delta = \frac{\Delta E_x}{E_x} = \int_{F_c}^{\infty} |S_x(f)|^2 df \bigg/ \int_0^{\infty} |S_x(f)|^2 df .$$

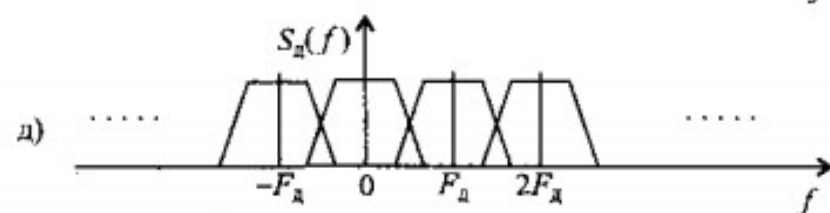
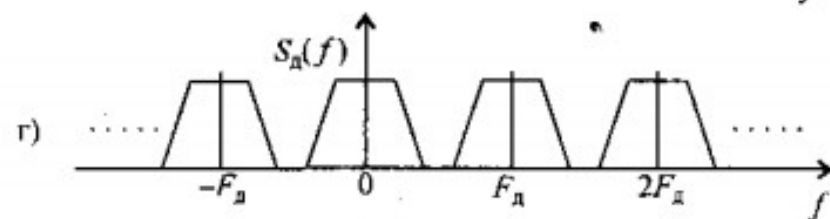
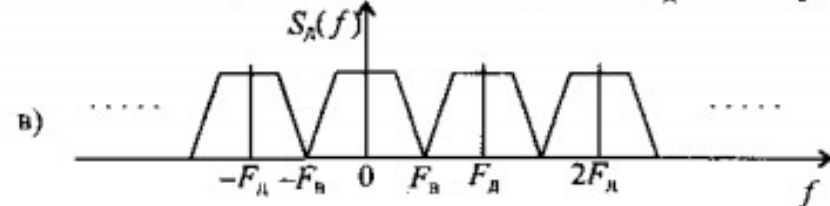
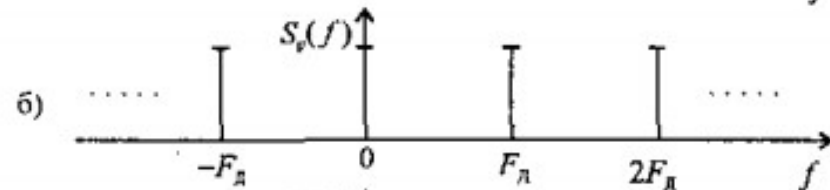
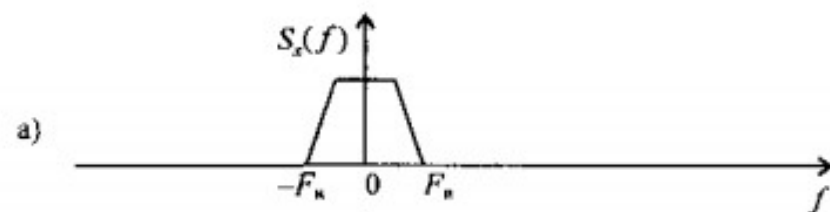
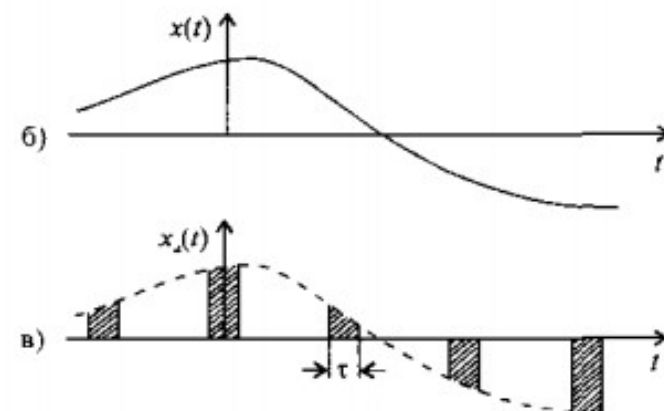
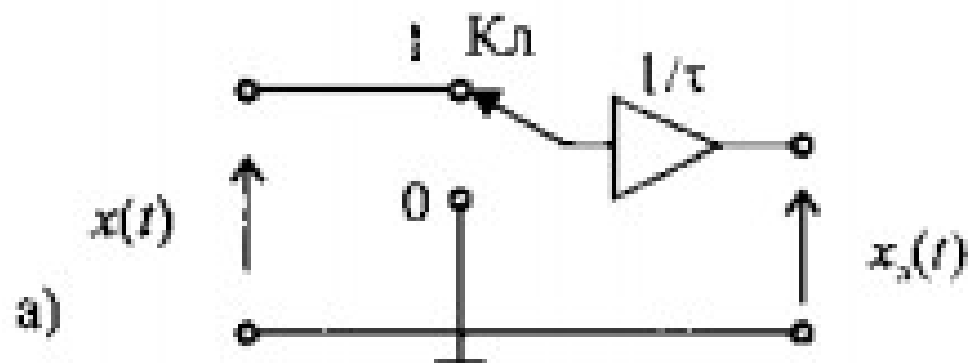
Сигнал базасы:

Сигнал базасы **$B=2F_cT_c$** өнімі болып табылады, мұндағы F_c – сигнал спектрінің ені, T_c – сигнал ұзақтығы.



$$P_{\text{ш.кв}} = (\Delta x)^2 / 12.$$





$$\Delta = \frac{1}{F_D};$$

$$F_D = 2F_B;$$

$$F_D > 2F_B;$$

$$F_D < 2F_B$$



Бақылау сұрақтары

- 1. Котельников базисі немесе қатары туралы жазыңыз**
- 2. Котельников теоремасын жазып, мағынасын түсіндіріңіз**
- 3. Дискреттелген сигналдың спектрі туралы жазыңыз**
- 4. Аналогты-сандық түрлендіргіштің құрылымы туралы жазыңыз**
- 5. Сандық -аналогты түрлендіргіш құрылғысы туралы жазыңыз**
- 6. Қалпына келтіру сүзгісі және оның параметрлері**
- 7. Дискретизатор құрылғысы туралы жазыңыз**
- 8. Дискреттеу жиілігінің спектрге байланысы**